Date　　No.

2015年　東大理系数学　第1問

$C: y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$ が

$a>0$ で通過する領域

通過領域といったら解の配置

⇕

$y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$ を a で解べきの順に整理した

$4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1 = 0$ …(*)

a の2次方程式とは限らない

が、$a>0$ に少なくとも1つ実数解を持つような x, y の条件。

と読み換えて解く。

(i) $x^2-1=0$ の場合。(*)が1次方程式の場合。
(つまり $x=\pm1$)

$a>0$ で動かした時の $\frac{1}{4a}$ の値域は $\frac{1}{4a}>0$

(*) ⇔ $-4ya+1=0$　　$y = \frac{1}{4a} > 0$

よって、$x=\pm1$ かつ $y>0$

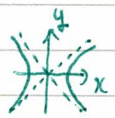
(ii) $x^2-1 \neq 0$ の場合。(*)が2次方程式の場合

$a>0$ に少なくとも1つ実数解を持つのは、
(1) $a>0$ に重解を持つ。
(2) $a>0$ に異なる2解を持つ。
(3) $a>0$ と $a \leqq 0$ に1解ずつ持つ
の3通り。

(1) $D=0$ かつ (重解) >0 となればよい。

・$D=0$ ⇔ $(-4y)^2 - 4\cdot4(x^2-1)\cdot1 = 0$

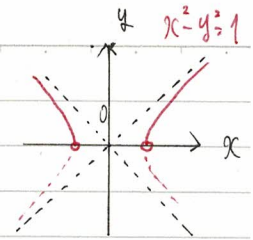
⇔ $x^2-y^2=1$



・(重解) $= \frac{-(-4y)}{2\cdot4(x^2-1)} > 0$ ⇔ $\frac{y}{x^2-1} > 0$

⇔ $y(x^2-1) > 0$

よって、右図の赤色の実線部分



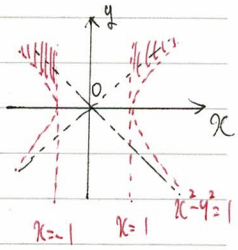
(2) $D>0$ かつ $\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$ となればよい。

・$D>0$ ⇔ $x^2-y^2>1$

・$\alpha+\beta>0$ ⇔ $-\frac{-4y}{4(x^2-1)} > 0$ ⇔ $y(x^2-1)>0$

・$\alpha\beta>0$ ⇔ $\frac{1}{4(x^2-1)} > 0$ ⇔ $x^2-1>0$

よって、右図の赤色の領域

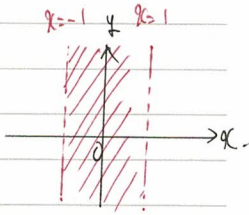


(3) $\alpha\beta \leqq 0$ となればよい。

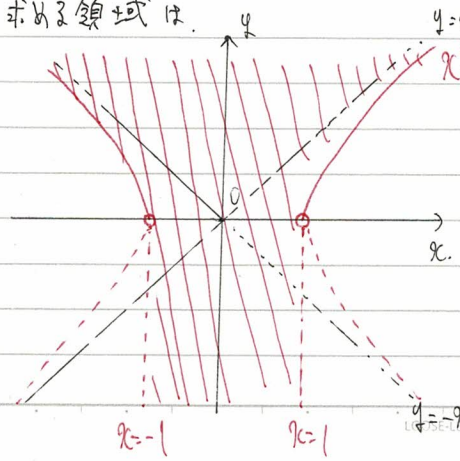
$\alpha\beta \leqq 0$ ⇔ $\frac{1}{4(x^2-1)} \leqq 0$ ⇔ $x^2-1 \leqq 0$

$x^2-1 \neq 0$ なので、$x^2-1<0$

よって右図の領域。



(i)と(ii)の(1)〜(3)の結果から、求める領域は、



境界は実線含み、点線と白丸は含まない。